615. D'Amore B., Radford L., Bagni GT. (2007). *Obstáculos epistemológicos y perspectiva socio-cultural de la matemática*. Colleción "Cuadernos del Seminario en educación". Bogotà: Universidad Nacional de Colombia.

OBSTÁCULOS EPISTEMOLÓGICOS Y PERSPECTIVA SOCIO-CULTURAL DE LA MATEMÁTICA[1]

Bruno D`Amore[2] - Luis Radford[3] - Giorgio T. Bagni[4]

BRUNO D'AMORE

Dipartimento di Matematica
Università di Bologna

LUIS RADFORD

École des sciences de l'éducation
Université Laurentienne
Sudbury, Ontario (Canada)

GIORGIO T. BAGNI

Dipartimento di Matematica
e Informatica
Università di Udine

Sumario. En el presente trabajo proponemos una conversación sobre algunos temas que han sido objeto de debate y controversia en didáctica de la matemática en los últimos años, como las actuales concepciones epistemológicas, las interpretaciones de los desarrollos históricos de los conceptos, el papel de la cultura en la cognición y en el aula, considerada esta última como una forma de sociedad. Entre otras cosas, nuestra conversación retoma la cuestión de si la idea de un obstáculo epistemológico pueda ser o no considerada como base para establecer un vínculo significativo entre la historia y la didáctica de la matemática.

1. Introducción

El considerar a un concepto matemático por medio de su evolución histórica y epistemológica requiere asumir posiciones comprometidas y significativas. Además, son problemas relevantes los relacionados con la interpretación, inevitablemente conducida a la luz de nuestros paradigmas culturales actuales mediante los cuales se ponen en contacto culturas "diferentes pero no inconmensurables" (Radford, Boero, Vasco, 2000, 165).

La actualidad didáctica del argumento introducido es evidente: los procesos de enseñanza–aprendizaje de la matemática están influenciados por las

[1] Esta es una traducción revisada por los autores del artículo publicado en italiano:
D'Amore B., Radford L., Bagni GT. (2006). Ostacoli epistemologici e prospettive socioculturali. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*. 29B, 1, 11-40.
[2] Departamento de Matemática, Universidad de Bologna (Italia).
[3] Escuela de Ciencias de la educación, Universidad Laurentienne, Sudbury, Ontario (Canada).
[4] Departamento de Matemática e Informática, Universidad de Udine (Italia).

concepciones de los docentes sobre la naturaleza del conocimiento científico y de su evolución (Brickhouse, 1990; Hashweb, 1996) y de los cambios de convicciones ocurridos luego de la maduración alcanzada con reflexiones personales o, mejor, por ocasiones de fuerte confrontación teórica (D'Amore, Fandiño Pinilla, 2004; Bagni, 2005 por publicar).
Una evolución histórica didácticamente propuesta desde un punto de vista moderno permitiría tal vez presentar a los estudiantes los 'obstáculos espistemológicos' principales y aclarar algunas posiciones históricas, cuya debilidad fue revelada sucesivamente; pero, por otro lado, un planteamiento que pretenda hacer seguir al desarrollo cognitivo un recorrido modelado en base a la evolución histórica[5] encontraría notables dificultades teóricas (Werner, 1984; Radford, 1997).

La presentación de elementos históricos con referencia al propio contexto cultural ofrece la posibilidad de una profundización orgánica e induce reflexiones fundamentales sobre la génesis de un concepto (Bagni, D'Amore, 2005): la elección de una historia "interna", que da cuenta de un desarrollo aislado de la matemática, resulta problemática (Grugnetti, Rogers, 2000, 40) y difícilmente sostenible desde el punto de vista epistemológico.

Varios agentes clasificados en los años '70-'80 por G. Brousseau (1976, 1983, 1989) contrastan la formación de los conceptos que actúan como obstáculos. Analizaremos en este escrito la formulación teórica de L. Radford, a propósito de la interpretación que daremos a la idea de "obstáculo epistemológico" (Bachelard, 1938), sobre la cual pueda fundamentarse una conexión de la historia a la didáctica, a través de la epistemología. Realizaremos tal profundización proponiendo la relatoría de una conversación entre tres, con Luis Radford y Bruno D'Amore que responderán a algunas preguntas propuestas por Giorgio Bagni.

2. Historia de la matemática y didáctica

Bagni: Ludwig Wittgenstein (1956, IV, 52) escribió: "Incluso quinientos años atrás podía existir una filosofía de la matemática; una filosofía de aquello que era la matemática en ese entonces". ¿Eso significa que la reflexión sobre la matemática y sobre la didáctica tiene que ser historizada?

Radford: Aquí Wittgenstein distingue el trabajo del matemático del trabajo del filósofo. El filósofo, dice Wittgenstein, no hace matemática: juzga la matemática. Como todos los juicios, el del filósofo se ubica en un período histórico; por lo tanto, el filósofo juzga la matemática desde su propio tiempo. En este sentido, una filosofía de la matemática era posible hace 500 años y es posible aún ahora. El punto notable de la idea de Wittgenstein es el subrayar la distancia entre el filósofo y el matemático. Es esta distancia la que hace posible diferenciar un juego lingüístico (la matemática) del otro (la filosofía de la matemática). Ambos juegos lingüísticos son históricos, Wittgenstein nos lo dice. Y las relaciones entre éstos también lo son. Aunque yo no sea un apasionado

[5] Pensemos en el paralelismo entre ontogénesis y filogénesis, expresado por E. Hackel en el lejano 1874, y a la conocida tesis en: Piaget, Garcia, 1983; vease : Furinghetti, Radford, 2002.

de la idea de los juegos lingüísticos, por razones que surgirán en el curso de nuestra conversación, consideraré, para responder la pregunta, la didáctica de la matemática como un juego lingüístico. Así como la filosofía, la didáctica ofrece una nueva luz sobre la naturaleza de la matemática. Se trata de una luz diferente de aquella aportada por el filósofo, dado que el rol del didacta no es el de *juzgar* la matemática. Algunos están más interesados en el problema del desarrollo conceptual del pensamiento matemático (cfr., por ejemplo, el Capítulo 5 del ICMI Study sobre la historia y la didáctica de la matemática: Fauvel, van Maanen, 2000). Este problema nos lleva a considerar otros problemas, como la relación entre filogénesis y ontogénesis. Podemos entonces crear un juego lingüístico –que es, como todos los juegos lingüísticos, cultural e históricamente situado- que, sin llevar a un juicio, pueda proporcionar elementos de comprensión de la naturaleza de la matemática. No obstante, el problema es mucho más complicado de lo que puede parecer a primera vista. En efecto, dicho juego no puede jugarse sin comprometerse necesariamente con alguna conceptualización del desarrollo de la matemática y de las metodologías apropiadas para llevar a cabo el estudio de dicho desarrollo. Por ejemplo, muchos epistemólogos no aceptan la epistemología genética de Piaget; para estos epistemólogos la naturaleza y el desarrollo de la matemática no pueden ser esclarecidos con el estudio del pensamiento infantil. Nos enfrentamos aquí con la clásica oposición entre psicología y epistemología que fue parte del debate sobre los fundamentos de la matemática en los albores del siglo XX, un debate en el cual Wittgenstein decididamente tomó partido en contra de la psicología de su tiempo.

D'Amore: Cuando cualquier reflexión humana adquiere la denominación de “disciplina”, significa que se está historizando, es decir, que está asumiendo una dimensión de desarrollo que tiene como eje de apoyo al eje temporal. Primero, existen tantas teorías como practicantes; luego, se forman un vocabulario y unas prácticas comunes (Romberg, 1988). Cuando existe una práctica suficientemente compartida, nacen una meta-práctica y una reflexión sobre aquello que la disciplina permite construir. Esta reflexión, en un inicio, está hecha por los mismos seres humanos que desarrollaron las prácticas, luego puede ser realizada por otros. Una reflexión sobre la disciplina es ineludible y acompaña a cada disciplina, también a la matemática. En general, las didácticas se mantienen a la par de las disciplinas, pero el caso de la matemática es especial, en mi opinión. Parece implícita en la misma creación matemática la necesidad de comunicarla, y éste es el primer paso hacia su didáctica. Esto no significa que la matemática y la didáctica *tengan* que ser historizadas, sino que de hecho lo son. Sobre ambas, sin embargo, se pueden expresar juicios y valoraciones, y esto nos lleva a la frase de Wittgenstein. Existirán juicios y valoraciones sobre la matemática y existirán sobre la didáctica de la matemática; refiriéndose a temas diversos, a prácticas humanas diferentes, lenguas diferentes, objetivos diferentes; y sin embargo tendrán en común un sustrato que a ambas alimenta. La “historización” ocurre entonces separadamente, según la acepción de Feyerabend (2003, 120): la totalidad del conocimiento humano “es un *proceso histórico* complejo y heterogéneo que contiene anticipaciones todavía vagas e incoherentes de futuras ideologías junto a sistemas teóricos muy sofisticados y a formas de pensamiento antiguas y fosilizadas. Algunos de sus elementos están disponibles en la forma de aserciones, escritas en forma clara y precisa, mientras otros están ocultos y adquieren notoriedad sólo por contraste, por comparación con opiniones nuevas e insólitas" (Feyerabend, 2003, 120). Para la matemática, el pasaje descrito por Feyerabend ocurrió siglos atrás, para la didáctica, en mi opinión, está en curso.

Bagni: Parece importante, incluso fundamental, que un profesor de matemática, en cada nivel escolar, dialogue con la historia y la epistemología de la propia disciplina y logre emplear las referencias históricas concientemente y coherentemente con las propias concepciones epistemológicas. Pero ¿Cómo es posible, para un profesor, acercarse a la historia? ¿Mediante fuentes secundarias? Y ¿Qué rol se sugiere reservar a la lectura de los textos originales? En particular, ¿Cómo se pueden tener correctamente en cuenta (Barbin, 1994) las concepciones de los estudiosos que, en los diferentes períodos históricos, se han encargado de las ediciones de las obras matemáticas consideradas?

Radford: Una de las principales características de la aproximación histórico–cultural al pensamiento matemático que he descrito en años pasados es la componente histórica. Esto significa, entre otras cosas, que aquello que conocemos y el modo con el cual llegamos a conocerlo deben enmarcarse no sólo por medio de *aquello* que hacemos ahora y *cómo* lo hacemos, sino también por una inteligencia histórica que reposa en prácticas sociales, instituciones, lenguajes, artefactos, libros, monumentos , etc. No debemos perder de vista que el conocimiento y el conocer son ambos sostenidos por esta inteligencia histórica que hemos heredado de las generaciones pasadas. Este es el motivo por el cual los profesores, a mi parecer, deberían conocer al menos algo de la historia de la matemática. Pero esta afirmación mía no refleja sólo una posición "humanista" que contrasta con la agonía de un mundo post-industrial que lleva a la despersonalización. Ésta sostiene el estímulo político de hacernos conscientes del hecho de que no somos ni el producto exclusivo de nuestras actividades, ni el producto irrevocable de nuestras prácticas discursivas. La historia de la matemática (concebida no como una simple secuencia de eventos heroicos, con nombres y fechas) es un medio para comprendernos a nosotros mismos como seres históricos y comprender nuestra responsabilidad de educadores. Hasta qué punto y cómo los profesores tienen que adquirir familiaridad con la historia de la matemática es indudablemente una buena pregunta que no tiene una única respuesta.

D'Amore: Existen fuentes "secundarias" de óptimo nivel, que inducen el gusto por las lecturas directas (algunas las hemos recogido en: D'Amore, Speranza, 1989, 1992, 1995). A mi me sucedió, décadas atrás. No creo que un profesor deba necesariamente transformarse en un historiador de la matemática. Me parece fundamental que el profesor advierta la fuerte presencia de la transformación histórica de las teorías que enseña, que no las conciba como inmanentes, inmutables, definitivas. Debe además hacerse conciente del hecho de que las teorías se desarrollan y evolucionan sobre todo a causa de las prácticas humanas compartidas; que cada teoría es el resultado de aportes sociales, a pesar de que circula ampliamente la tendencia a hacer aparecer frecuentemente al individuo como un creador aislado, libre de condicionamientos (Radford, 1997, 2003b; Godino, Batanero,1994). A mi parecer es esencial que el profesor conozca a fondo, así sea a través estudios de fuentes de carácter indirecto, siempre que sean acreditadas, la historia y la epistemología de aquello que enseña, al menos por dos razones profesionales: a) enriquecimiento cultural, y b) entrar en contacto con las razones objetivas de la existencia de obstáculos epistemológicos (D'Amore, 2004). Entre los grandes beneficios didácticos concretos que advierto: una diversa evaluación de la acción del alumno (errores, misconcepciones[6], por ejemplo), una valoración diferente de la idea de rigor, un comportamiento diferente respecto a la comunicación matemática,... Me parece además fundamental una aproximación social–sociológica *a* estos aspectos epistemológicos conceptuales, que restituyan a nuestra disciplina aquel ser suyo, que se originaba en las actividades humanas, ese ser compartido, discutido, comunicado, transmitido, *usado* en contextos culturales diversos, en situaciones diacrónicas y sincrónicas.

Bagni: De acuerdo con la aproximación socio-cultural, el conocimiento está relacionado con las actividades en las cuales los sujetos se ocupan (Radford, 1997, 2003a, 2003b) y esto debe ser considerado en relación con las instituciones culturales del contexto que se esté estudiando. Desde este punto de vista ¿Cómo consideran, hoy, los obstáculos epistemológicos?

D'Amore: Substancialmente, no creo que la base histórica de la idea de obstáculo epistemológico enunciada en los años 70 por Brousseau sea debilitada en sus fundamentos por estas consideraciones de Radford que, de otro lado, comparto del todo. Precisamente para discutir sobre este punto, los invité a ambos a Suiza en el 2004 y el resultado del coloquio entre los tres me ha convencido profundamente. Ciertamente, la concepción de obstáculo epistemológico cada vez parece más un constructo teórico al cual hacer referencia, que un medio de análisis para intervenciones didácticas; éste ya no parece aislado de otras formas de explicación objetiva de los resultados de los procesos de enseñanza–aprendizaje, como lo era en los años '80 (D'Amore, 2003b). El obstáculo epistemológico ya no sólo resulta fuertemente vinculado a factores conceptuales sino a factores sociales, en los cuales la historia "pura" de la matemática entra en contacto con las historias de las prácticas humanas (D'Amore, 2005a). Lo que continúa gustándome mucho de la presentación clásica de Brousseau sobre el obstáculo epistemológico, es el ser expresión de conocimiento y no de ausencia de conocimiento. Este punto, no sólo me ha fascinado y convencido siempre, sino que me ha sido muy útil en las investigaciones de micro-didáctica en el aula. Me ha servido además como base de apoyo para reflexiones arriesgadas, como aquella revisión semántica del término "misconcepción" (D'Amore, Sbaragli, 2005). Ciertamente, relacionar la idea de obstáculo epistemológico con factores provenientes de las prácticas sociales, conlleva hoy a una revisión de aquello que ayer fundamentó toda *la teoría de los obstáculos*; pero de otro lado, *toda* teoría, primero o después, debe ser revisada.

[6] *misconcezion* en el original, derivado de *misconceptions* en ingles N. del T.

Radford: La idea de obstáculo epistemológico fue importada a la didáctica de la matemática en los tardíos años setenta, hace más de veinte años (cfr. Perrin – Glorian, 1993, 112). Era un período en el cual se prestaba poca atención al rol del contexto cultural en la actividad cognitiva. Cuando los aspectos sociales o culturales fueron tomados en consideración, se abordaron como algo de no mucha importancia. Lakatos, por ejemplo, dividió el desarrollo de la matemática en dos historias, una externa y una interna. La externa incluye el contexto cultural que, para él, tiene solamente un rol periférico: buenas condiciones culturales pueden acelerar el desarrollo de las ideas pero no pueden en ningún caso influir sobre las ideas mismas. Desde este punto de vista, determinadas condiciones buenas o malas son parte de algo ajeno a la matemática. Al contrario, la evolución de las ideas matemáticas propiamente dichas se refiere a la historia interna, la única "verdadera" según Lakatos. Esta aproximación, naturalmente, es terriblemente racionalista. Ahora, según la teoría de los obstáculos epistemológicos, aquello que hace que un obstáculo sea epistemológico es su presunta naturaleza no-cultural, no-didáctica, no-ontogenética. Un obstáculo es epistemológico por su presunta naturaleza epistémica intrínseca. Con esta premisa, la naturaleza epistémica de la cultura está excluida desde el inicio. De acuerdo con dicha idea, el "milieu"[7] (como es considerado en la *Teoría de las Situaciones*, de Brousseau) es concebido frecuentemente como una cosa que se opone al individuo. Más precisamente, la relación entre el individuo y su milieu es antagónica. Cada uno está involucrado en un juego racional, buscando obtener el máximo del otro –en un juego de suma cero. He analizado este punto en un artículo publicado hace casi 8 años (Radford, 1997). Escuchando a D'Amore decir que "el obstáculo epistemológico resulta fuertemente vinculado a factores sociales", me pregunto qué tan fuerte realmente puede ser este vínculo en dicha teoría. Pienso que no puede ser tan fuerte, de otro modo la base de la idea de obstáculo epistemológico resultaría destruida y la notable tipología de obstáculos (ontogenético, didáctico, cultural y epistemológico) ya no tendría sentido. Prefiero analizar teóricamente el problema del pensamiento matemático siguiendo una línea distinta. Creo que el pensamiento y el conocimiento están *imbricados* definitivamente en sus contextos culturales. Recuerdo una discusión que tuvimos en Francia en 1998, durante el encuentro de preparación del ICMI Study sobre Historia que condujo al libro editado por Favuel et van Maanen. La discusión se dio a raíz de una intervención en la que yo insistía (siguiendo a Feyerabend, Foucault, D'Ambrosio et otros) en la importancia de poner atención a los contextos culturales. Algunos colegas percibieron mi enfoque cultural al pensamiento matemático como algo sin relación con la epistemología de las matemáticas; para ellos mi enfoque no tenía nada que ver con la episemología sino ¡con la sociología del conocimiento! Si observamos la reciente literatura en didáctica de la matemática, las cosas parecen haber cambiado un poco desde ese entonces, aunque, naturalmente, en algunos países más que en otros.

Bagni: El vínculo entre entorno cultural y matemática en esta elaboración no se limita a una estimulante coincidencia (Wartofsky, 1979); respecto a eso se puede citar a Radford: «La configuración y el contenido del conocimiento

[7] Se asume con la idea de medio N. del T.

matemático está propia e íntimamente definido por la cultura en la cual ésta se desarrolla» (Radford, 1997, 32). Profundicemos en este punto esencial.

Radford: En efecto, lo que sugiero es que la cultura es mucho más que un estímulo y mucho más que un obstáculo para el conocimiento. Lo que afirmo es que el conocimiento está estrechamente enraizado en su contexto cultural o, en otras palabras, que la cultura es consustancial al conocimiento. Pero aquí debemos ser cautelosos. Mientras hace unos años la cultura era considerada desprovista de un rol *fundamental* en el conocimiento y en la actividad cognitiva, ahora parece que la cultura tiene un rol *omnipresente.* Hoy, incluso los Platonistas conceden que la matemática conlleva un aspecto humano y cultural, en la medida en que, para descubrir las verdades eternas de las cuales se supone que la matemática está constituida, se requiere de un ser humano (un descubridor) que necesariamente vive y respira en un contexto cultural. Por esta puerta los platonistas piensan que han penetrado en el campo de la cultura y reclaman la compatibilidad de su ontología con las premisas de las aproximaciones culturales. Por lo tanto, si no somos más precisos a propósito del vínculo entre cultura y mente, entre cultura y saber, terminaremos por cerrarnos en una postura más bien ingenua. Sobre la base de epistemólogos como Wartofsky y Ilyenkov, he sugerido que el conocimiento es un producto de un tipo específico de actividad humana –precisamente, de una actividad humana muy específica: el *pensamiento*. Pensar es un género de praxis social, una forma de reflexión sobre el mundo, que responde a categorías conceptuales éticas, estéticas y otras categorías culturales (Radford, en vía de publicación 1). El pensamiento griego del período clásico estaba conformado por la distinción eleática entre ser y no ser. Dicha distinción ha operado como una categoría conceptual general que ha sostenido la episteme griega y sus varias manifestaciones, entre ellas el pensamiento matemático. La episteme china estaba conformada por categorías conceptuales diferentes, en particular por la oposición yin-yang. Esta distinción hizo concebible, en el campo matemático, una cosa similar a lo que nosotros hoy llamamos "números negativos", números que eran inconcebibles en el período griego clásico. El pensamiento occidental tuvo que enfrentar profundas transformaciones para crecer con el germen de nuestro concepto contemporáneo de números negativos. En efecto, los números negativos se volvieron concebibles en el contexto del naciente Capitalismo del siglo XV y XVI, con la nueva división del trabajo en actividades humanas y un conjunto de nuevas categorías conceptuales culturales concomitantes, en particular el "valor" como abstracción cultural, y la "eficiencia" en el sentido tecnológico renacentista (Radford, 2004a). En resumen, nos encontramos completamente de acuerdo sobre este punto –el vínculo entre cultura y matemática no puede ser considerado como una pura coincidencia. Hay una conexión profunda entre éstas, y la razón es que las matemáticas (en plural) son formas culturales de reflexión sobre el mundo, formas culturales de dar sentido a éste.

D'Amore: La matemática es el producto de la acción recíproca, relacional, de individuos, al interior de una sociedad a la cual ellos pertenecen; tales individuos, quieran o no, ponen en acto estrategias de pertenencia a dicha sociedad (a veces son "prácticas", a veces meta prácticas) (cfr. Godino, Batanero, 1994; D'Amore, 2005a). Su comportamiento está bien explicado por los análisis de carácter sociológico. Al interior de tal sociedad, el lenguaje compartido adquiere un rol determinante. Éste no es sólo vehículo de comunicación, ya que a causa de las interacciones sociales a las cuales puede contribuir, el lenguaje se hace modalidad de creación. En la matemática, la creación y la comunicación de sus contenidos son frecuentemente considerados uno sólo (McClain, Cobb, 1997). La cultura no es otra cosa que la adhesión a un esquema preestablecido que identifica a la sociedad de pertenencia, aun incluso cuando parezca contradecirla (Bauersfeld, 1995); es el órgano propulsor, motivante. Por lo tanto, es impensable un conocimiento matemático cuyo contenido no sea absolutamente expresión de la cultura de la sociedad en el seno de la cual se desarrolla. Toda la historia de la matemática muestra cómo el desarrollo de prácticas determina la aceptación de ideas: el constante nacimiento de algoritmos nuevos, la creación de un álgebra simbólica, la idea misma de geometría analítica, el uso de números enteros (relativos)... No logro decidirme a hablar de más, es decir que las ideas sean incluso el resultado de prácticas o de necesidades, porque tengo muchos contraejemplos. Creo que el pensamiento humano se desarrolla hacia conquistas culturales que se afirman como ideas, que en torno a ellas se elabora un estatuto conceptual siempre más compartido y que un acto importante de ese compartir es la necesidad de *usarlas* para un propósito humano no sólo en potencia, sino en acto. Considero que un discurso del todo análogo se puede hacer para lo que concierne a la didáctica de la matemática. Sólo para proponer un ejemplo, ¿Quién hoy, conociéndolos, renunciaría a los instrumentos conceptuales que la investigación en didáctica de la matemática ha creado, para regresar a hipótesis didácticas ilusorias, como aquellas de los años '70, basados en instrumentos artificiales pre-confeccionados?

Bagni: En lo concerniente a la importancia del lenguaje, en las modernas reflexiones en didáctica, es necesaria una delicada y juiciosa reflexión a propósito de su rol en la formación misma de los conceptos: «En los últimos años [...] encontramos una clara tendencia a considerar el lenguaje y el discurso como productores de conocimiento y de ideas. No obstante esto, estamos autorizados a hacernos la siguiente pregunta: ¿podemos realmente atribuir al lenguaje este poder de crear los objetos teóricos del mundo de los individuos?» (Radford, 2003a,124). ¿Qué respuesta dar a tal pregunta?

D'Amore: Creo se deben distinguir dos tipologías de objetos en el ámbito de la creación de la competencia matemática (aprendizaje matemático): el objeto matemático en sí mismo y el objeto lingüístico que lo expresa. Sostengo que el aprendizaje matemático de un objeto O por parte de un individuo I al interior de la sociedad S no es otra cosa que la adhesión de I a las prácticas que los otros miembros de S desarrollan en torno al objeto dado O. ¿Cómo se expresa tal adhesión? Con la aceptación de prácticas que son, además, lingüísticas. Entonces, aunque considero que existe una diferencia entre los objetos de la matemática y los objetos lingüísticos que los expresan, creo necesario admitir que tal adhesión ocurre sobre las modalidades de intercambio lingüístico, dado que son éstas, sobretodo, las que determinan las "prácticas" de las cuales tanto se habla. Por lo tanto, a pesar de que no es el lenguaje el que crea objetos, los objetos son creados junto al lenguaje al interior del cual son expresados. A su vez, los objetos "expresiones lingüísticas" son objetos. Acepto de hecho la idea de Blumer (1982, 8), según la cual un objeto es «todo aquello que puede ser indicado, todo aquello que puede ser señalado o al cual se puede hacer referencia». Qué tan útil sea esta escogencia, ha sido ampliamente mostrado por Godino en su ontosemiótica del conocimiento matemático (Godino, 2002; sobre este tema, vease también D'Amore, Godino, 2006). Sin embargo, yo personalmente encuentro dificultades con este tema y no tengo reservas en admitirlo (D'Amore, 2001a, b, 2003c, d). Creo en la paradoja de Duval y en que la única vía de acceso a la noética sea la semiótica, al menos en matemática. Sin embargo, reconozco en el lenguaje, en los lenguajes, una fuerza que pertenece a las reflexiones del pasado, de los años '80. El lenguaje es mediador entre prácticas y pensamiento, pero también entre quién realiza dichas prácticas y quién solicita que se comunique a los otros el propio pensamiento. Son los seres humanos los que adoptan y explicitan prácticas, pero es el lenguaje compartido, son los lenguajes compartidos, los que producen y realizan el puente comunicativo. En la matemática, a veces, es difícil distinguir los dos aspectos. Frecuentemente nosotros pensamos el lenguaje por como lo expresamos en su forma más visible, oral, escrita, formal, pictográfica, figuras, esquemas, dibujos... Pero en un cierto sentido pertenecen a las formas del lenguaje las expresiones a través de las cuales las prácticas humanas se realizan, la música, las obras de arte, las manufacturas, los gestos, el juego, las construcciones (*in senso lato)* de cualquier género. La presencia de estos géneros expresivos abunda en la matemática. Si pensamos en el lenguaje sólo como un artefacto comunicativo, su versatilidad todavía sorprende. Las limitaciones intrínsecas a su realización pueden constituir obstáculos a la explicitación total del pensamiento. Así que, lagunas del uno se identifican con deficiencias del otro. En la matemática y en su historia este punto es evidente; en la didáctica de la matemática está continuamente presente a los ojos de cualquier observador. Me entusiasma pensar el lenguaje como un producto del conocimiento del ser humano pensante, como uno de los productos posibles. En espera de organizar las ideas, por ahora esta aproximación me permite distinguir al lenguaje de quien lo usa, al conocimiento de sus formas explicitas de ostensión por parte de los individuos.

Radford: Me considero entre quienes aprecian la importancia epistémica del lenguaje. Pero sostengo que –epistemológicamente hablando- los modos de conceptualizar, conocer y pensar no pueden ser adecuadamente descritos solamente en términos de prácticas discursivas. Busco explicarme y responder a la pregunta recogiendo lo que le ocurrió a una antropóloga que partió a México, hace algunos años, a estudiar una comunidad específica –los Mazahua. La antropóloga quería saber cómo los padres instruían a sus hijos. Escogió algunos padres y les preguntó: "Cómo instruyen ustedes a sus hijos?" Todos los interpelados se sorprendieron con la pregunta. En el curso de las intervenciones, ellos afirmaron que no educaban a sus hijos, sino que los niños se limitaban a aprender. Posteriores observaciones etnográficas precisas, esclarecieron que, para aprender, los niños se integraban a sofisticadas prácticas sociales con sus padres, prácticas en las cuales era esencial observar a los padres en el trabajo, y de esta manera unirse a ellos en dicho trabajo, luego empezar a actuar bajo la supervisión de los padres, evaluar las acciones, corregirlas si es necesario, etc. He aquí un ejemplo (de Haan, 1999,

96) de una madre (M) que responde a las preguntas de la entrevistadora (I) a propósito de cómo M enseña a sembrar a su hijo de 10 años:

I:(…) por ejemplo, sembrar, (él) ¿lo sabe?
M: Sembrar, sí.
I: ¿Y cómo lo aprendió?
M:(*en voz baja)* Con un hombre.
I: ¿Y cómo? (*Tanto la madre como la hija presentes en la entrevista ríen, obviamente encuentran extraña mi pregunta*)
M: Le dijo algo como de ir a sembrar.
I: Sólo así…
M: Sí.
I: ¿Pero él inició inmediatamente a sembrar?
M: Sí… (*ríe*)
I: […] Dices*:* bien, vamos a sembrar.
M: Sí.
I: ¿No lo había hecho nunca, antes, digamos?
M: No.
I: *¿Y cómo* … por qué la primera vez es difícil de hacer, *y cómo*…?
M: Si, pues*,* como sembramos también nosotros, sólo en el momento de la siembra*,* la cosecha*,* sembramos*….*
Como el análisis antropológico sugiere, en los procesos de enseñanza-aprendizaje Mazahua, donde difícilmente encontraremos una “trasposición didáctica” en el sentido de Chevallard, el aprendizaje del niño está amalgamado con su implicación en las prácticas sociales de la comunidad (figura 1). Los Mazahua usan el lenguaje, naturalmente, pero más que estar confinado en un género de discurso teórico, el lenguaje es utilizado como parte de la práctica social, para sostener y regular las acciones, por ejemplo, en forma de índice para hablar de líneas rectas y de espacio, como es sugerido por el próximo ejemplo que se refiere al arado (*op.cit.*104):

M: […] Cuándo se muestra ehh, cómo arar, decía*.*
I: Hmm.
M: Y entonces debe hacerlo, es un trabajo que tiene que hacer como lo haría un adulto.
I: Hmm.
M: Porque es una cosa*,* bueno*,* cuando es así (*indicando una cosa que no es una línea recta*).
I: Sí.
M: Eh no.
I: No.
M: En conclusión, tienen que estar derechas. Finalmente*,* esto es lo que tiene que aprender, como se lo hará ver (*probablemente refiriéndose al padre*).

Figura 1. Siembra de semillas de maíz en una comunidad Mazahua. Tirado de Haan, 1999).

Como comenta de Haan «al niño no le está permitido hacer las cosas de manera diferente, en cuanto a que ciertos estándares [culturales, científicos] tienen que ser alcanzados; el niño debe hacer las cosas como le han sido mostradas». He querido recordar este ejemplo porque creo que muestra una práctica social que escasamente puede ser llamada discursiva. Se trata de una práctica de acciones, donde el lenguaje está presente, pero de manera diferente. Temo que nuestra contemporánea fijación a propósito del lenguaje –detrás de la cual el espectro de Aristóteles parece todavía obsesionarnos- sea realmente otra forma de racionalismo, o quizás uno de sus últimos residuos. Es una obsesión en la cual las prácticas humanas son sustituidas por palabras, y el actuar humano se pierde en una jungla de palabras y de signos. Prefiero decir que el lenguaje es mediador de las actividades humanas. En calidad de mediador, sostiene, en larga medida, nuestra historia cultural, como hacen los artefactos, los monumentos, las pinturas, etc. Pero el lenguaje no tiene un poder creativo, en cuanto el lenguaje no piensa. Quienes piensan son los individuos que usan el lenguaje. Pensando, es decir, reflexionando sobre el propio mundo, los individuos usan el lenguaje, los artefactos, etc. y haciendo esto producen los propios objetos de conocimiento.

3. El Aula de clase como sociedad

Bagni: Según la perspectiva socio-cultural, la aproximación al hecho histórico no está centrada en una presunta existencia objetiva de éste en el seno del desarrollo de la matemática, independiente de factores sociales, actividades humanas, procesos semióticos y simbólicos. Entonces ¿La referencia a las prácticas del comportamiento humano al interior de una sociedad que expresa necesidades y condicionamientos culturales impide la objetivación de los progresos del camino de la ciencia?

D'Amore: Son problemas distintos. En todo caso, aquí me interesa examinar la creación de la matemática entendiéndola como aprendizaje, que asumo como adhesión a una práctica social compartida (D'Amore, 2005a). El comportamiento humano al interior de una sociedad determina dos tipos de actividades personales. Actividades de adhesión a la sociedad, según las normas pre-establecidas que definen los objetivos de ella (por ejemplo, se está en el aula, en la sociedad clase, teniendo como norma preestablecida para esta sociedad el aprendizaje de la matemática); meta-actividades de adhesión a la sociedad, buscando obtener el reconocimiento de positivo funcionamiento a través de la conquista directa de los fines (prosiguiendo con el ejemplo, si el reconocimiento de funcionamiento que da la sociedad clase es interpretado como el hecho de recibir una evaluación positiva, seria posible no aprender matemática y meta-funcionar de modo tal que igualmente se obtenga la evaluación positiva) (Bagni, D'Amore, 2005; D'Amore, 2005a). Considero que es inútil, tal vez imposible, el pretender interpretar el aprendizaje en una sociedad con la ilusión de que se trata de hechos individuales aislados. El aprendizaje es entonces la creación de competencia matemática y no puede hacerse independiente de los factores sociales contingentes, de las actividades humanas, sobre todo de los procesos semióticos, que son determinantes.

Radford: Yo considero las dimensiones sociales y culturales del conocimiento no como cosas que obstaculizan el progreso, sino, al contrario, como cosas que proporcionan las condiciones para su existencia y desarrollo. Dado que el conocimiento es el resultado del pensar, y el pensar es una praxis social cognitiva, el progreso de la ciencia no puede ser descrito en términos generales. Puede sólo ser descrito atendiendo a aquellas necesidades y preguntas que el conocimiento práctico y teórico pretende resolver, en un cierto período histórico y cuyas soluciones y métodos quedan sujetos a las normas a las que D'Amore se refiere. Sólo deseo agregar que es importante no lamentarse sobre el hecho de que aquellas normas están impresas en grandes complejos sociales. Entre otras cosas, éstas involucran cuestiones de legitimidad y de poder. Las normas que constituyen y dan forma a las prácticas sociales en las cuales estamos inmersos (sea en la escuela o afuera de ésta), son en realidad altamente políticas. Tal vez tendré ocasión de volver sobre este punto más tarde.

Bagni: La aproximación ecológica (Hardesty, 1977) permite analizar los aspectos culturales y las prácticas compartidas (Godino, Batanero, 1994) en el contexto del ambiente social global en el cual una sociedad está inserta (D'Amore, 1999). La sociedad "clase" vive en el aula, pero ésta no está aislada del contexto "escuela", y es influenciada por los contextos "sociedad" y "familia". Las prácticas de los individuos pertenecientes a la sociedad están relacionadas con las expectativas y limitaciones determinadas por el ambiente en el cual viven y las posibilidades que éste ofrece. Por lo tanto, las prácticas no son libres, sino condicionadas por el ambiente, sistémicamente entendido (Bagni, D'Amore, 2005). Desde este punto de vista, ¿Las prácticas que se ejercen en el aula pueden entrar en un sistema de adaptación de los individuos (los estudiantes) a la sociedad, bajo la dirección de otro individuo que la institución social ha reconocido como su representante (el profesor)?

D'Amore: Este punto ya ha sido tratado en esta conversación. Sería ilusorio pretender interpretar por completo el comportamiento del individuo I al interior de una sociedad S en base a los objetivos, a los propósitos que son determinantes para la identificación de S. Se sabe que existen metaprácticas de adaptación de I a S, propósitos que se diferencian de aquellos compartidos, tentativas de eludir aquellos propósitos para llegar a aquello que es identificado como el verdadero resultado por alcanzar (Bagni, D'Amore, 2005; D'Amore, 2005a). Yo creo que el contrato didáctico de Brousseau, una de las piedras angulares sobre las cuales se ha fundado nuestra disciplina en los años '70, se puede explicar en estos términos: ¿Quién o qué cosa condiciona la elección de I, entre adherir a los propósitos que determinan S y el poner en acto las metaprácticas? Desde luego, como tú dices, las interpretaciones que de S y de sus propósitos dan la noósfera y todas las otras sociedades que rodean a I. La finalidad del profesor, guía, tutor, acompañante, organizador, etc., dependiendo de las varias versiones que fueron dadas en 30 años por las teorías de la enseñanza-aprendizaje, adhiere en todo caso al modelo que le fue asignado por la teoría de las situaciones, institucionalizador de conocimientos construidos personalmente en S y luego compartidos. Esto determina un rol diferente del profesor, reconocido por I y hecho propio por S, no siempre compartido por las realidades sociales que circundan S e influencian a I (D'Amore, 2005a). Las divergencias entre los comportamientos de I esperados por el profesor o por la institución, son frecuentemente ocasionados por la ausencia de competencia (matemática, epistemológica y didáctica) de quién debe juzgar el comportamiento de I (vease mi reciente ejemplo sobre la demostración en el aula, D'Amore, 2005b). Es obvio que, cambiando los parámetros de referencia, todo se acomoda a éstos; las elecciones epistemológicas de base, o las referencias a diferentes teorías del aprendizaje, o ambas (como frecuentemente sucede), determinan verdaderas revoluciones en las interpretaciones de los hechos que suceden en el aula. Bastaría pensar en dos grandes corrientes en conflicto, cada una de las cuales es múltiple: el realismo y el pragmatismo (D'Amore, 2003b). Devolviéndome a los juegos lingüísticos implícitos en la primera pregunta, aceptando esta idea, queda excluida toda interpretación realista, pero se abre camino a interpretaciones a la Chevallard (antropológicas), a la Godino (ontosemiótica) (D'Amore, Godino, 2006). En fin, ¿Cómo no tener siempre en mente que todo intento del individuo de permanecer anclado a una sociedad, no es más que una adhesión al modelo implícito en los "otros", que se reconocen como pertenecientes a aquella sociedad?

Radford: Mi repuesta a la pregunta formulada es sí: las prácticas del aula pueden ser consideradas como sistemas de adaptación de los estudiantes a la sociedad. Pero ¿cómo podemos describir esta "adaptación"? Y ¿cuál es el rol que juegan en ella los profesores y los estudiantes? Aquí las respuestas pueden variar, particularmente gracias a las premisas epistemológicas. Así, el socio-constructivismo responde a esta pregunta en un modo que, pienso, es muy diferente de aquel de la Teoría de las Situaciones a la cual D'Amore se refiere en su respuesta, y de la aproximación histórico-cultural de la cual he hablado antes. Dado que el socio-constructivismo está cimentado en la idea de que el conocimiento procede a través de un proceso de negociación de significados, y en cuanto éste concibe al aula como una suerte de espacio comercial o de negocios, el profesor es concebido casi desprovisto del poder de imprimir una determinada dirección a las negociaciones. Virtualmente, es un negociador a la par de cada uno de sus estudiantes. Naturalmente tal premisa lleva a numerosas e interesantes paradojas, pero no es esto de lo que nos estamos ocupando. Lo que queremos subrayar es que la idea de "adaptación" puede asumir diferentes formas, según la cultura en la cual es considerada, en tanto toda visión del aula como un sistema de adaptación está ya inmersa en categorías culturales, algunas de las cuales son parte de aquella zona confusa que Castoriadis (1987) llama "imaginario colectivo". Si pensamos que el propósito último de la educación es la autonomía del individuo, como sugería Kant, sintetizando una de las ideas claves de la filosofía europea del '700 (el Iluminismo), la negociación del significado es una vía "natural" para la adaptación del aula a la sociedad. Para el iluminismo, el derecho a escoger el significado de nuestros conceptos predomina como parte de nuestro camino hacia la autonomía. La idea kantiana de adaptación se funda sobre una particular concepción del hombre mismo –sobre la idea de sí mismo como un individuo racional y autosuficiente. Es éste el fundamento del pensamiento político contemporáneo neo-kantiano. Si, por el contrario, el fin último de la educación es considerado el volverse miembro de una comunidad, donde pertenecer significa ser-con-los-otros (Radford, en vía de publicación 2), entonces el término "adaptación" asume un significado diferente. La clase no es considerada como un conjunto de individuos que se enfrentan por la propia autonomía, sino como un grupo que apunta a un realizable modo de vida comunitario.

Bagni: Es emblemático que el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática se juegue al interior de la escuela; tal término, que en griego antiguo significa “libre uso de las fuerzas espirituales”, hoy significa “institución regulada por normas específicas al interior de un recorrido de instrucción”. En el primer caso, las prácticas prefiguradas eran las de cultivar el intelecto propio, hacia actividades con un fin en sí mismas; en el segundo, la comunidad es regulada por normas que sancionan las actividades, los tiempos, las modalidades, los propósitos, las metas. En el primer caso no hay obstáculos; en el segundo, se crean incluso donde no existirían (Bagni, D'Amore, 2005). ¿Se puede vincular este punto a la tradicional clasificación de los obstáculos?

D'Amore: Desde cuando la escuela es lo que hoy todos nosotros conocemos, está vigente la segunda de las interpretaciones que tú presentas; la historia no nos dice mucho sobre la primera y de todos modos se nos escapa. Ciertamente, la clasificación de los obstáculos ha sido hecha por comodidad conceptual y para orientar los estudios. Sobre esto he discutido ampliamente de manera personal con Brousseau, y en un trabajo mío (D'Amore, 2003b) presento una “explicación” de la terna (obstáculos ontogenéticos, didácticos, epistemológicos) fundada sobre el triángulo de la didáctica (en el mismo orden: estudiante, profesor, saber). Según Brousseau, en esta explicación, por un lado funcional y por el otro conceptualmente organizativa, queda oculta la función, tan importante en la teoría de las situaciones, de su *milieu.* Desafortunadamente no tengo nada escrito, tratándose sólo de conversaciones. Sin embargo, nuestro amigo en común, al cual todos reconocemos una importancia histórica determinante para la disciplina, ha aceptado escribir un bello prefacio a aquella obra, convencido de poder adherir entonces a esta visión que busca acomodar dos puntos de vista. Yo creo que, más allá de esta cómoda modelación, no se puede pensar que la tradicional clasificación de los obstáculos sea con intersección vacía, como he buscado evidenciar en diferentes trabajos, míos o de mis alumnos (que no cito, por brevedad); en éstos, se parte frecuentemente de obstáculos epistemológicos para mostrar que la verdadera causa evidente de las situaciones de una fallida construcción de conocimiento reside en obstáculos didácticos. Por hacerla breve, la clasificación “histórica” de los obstáculos provee sólo un modelo. Como ya se que Radford encontrará motivos para reír acerca de esta cuestión, podría anticiparme ya a sus objeciones. Me dirá que la clasificación de los obstáculos y la naturaleza teórica de éstos, depende de las elecciones que nosotros operemos sobre la cultura y sobre el conocimiento. ¿Cómo no compartir esta manera de pensar? Pero éste es cuesta arriba, mientras la pregunta es, por decirlo así, cuesta abajo. Si queremos derribar todo, entonces aceptemos que el obstáculo no siempre es un obstáculo, sino que es un… compañero de viaje con el cual debemos ajustar las cuentas, que a veces es extremadamente difícil distinguir un obstáculo ontogenético de uno didáctico; en efecto, tengo ejemplos de obstáculos extraídos de la vida real del aula de clase que son todos los tres obstáculos puestos juntos. ¿Qué cosa quiere decir *realmente* construir conocimiento? ¿Qué cosa es *realmente* el conocimiento? Las respuestas a estas preguntas determinan la naturaleza misma de las escogencias sobre las cuales se basan definiciones y connotaciones. Son demasiadas variables en juego para emitir sentencias unívocas.

Radford: El modo en el cual la cuestión está expuesta podría sugerir que todos los esfuerzos que apuntan al “libre uso de las fuerzas espirituales” no encontrarán obstáculos, mientras en el segundo caso los obstáculos serán inevitables. No estoy seguro de estar de acuerdo. Tal vez el punto que encuentro problemático es el significado del término *obstáculo*. Si con el término obstáculo epistemológico nos referimos a un tipo de conocimiento parcial (por ejemplo, un conocimiento puesto en alguna parte del recorrido del desarrollo conceptual que sirve para resolver ciertos problemas y que comienza a ser causa de errores en el momento en que es aplicado por fuera de este tipo de problemas), la cuestión fundamental para mí consiste en explicar la *naturaleza* del camino que se supone es recorrido por todos nosotros durante el desarrollo conceptual, prescindiendo de nuestro contexto temporal y cultural. Precisamente en cuanto su naturaleza es considerada más allá de la cultura y del tiempo, tal recorrido parece ser un recorrido *universal* de desarrollo conceptual. Ahora, dado que para mí la cultura y el conocimiento tienen la misma sustancia, considero que la precedente concepción de obstáculo es demasiado ambiciosa. Pero, por amor a la claridad, continuemos con la respuesta a la pregunta. Se puede pensar que los obstáculos aparecerán cuando las prácticas socioculturales sean efectuadas. Este modo de entender la cuestión de los obstáculos en el aprendizaje es muy difuso. Antes que una suerte de potenciamiento, la cultura es vista como un impedimento. Creo sin embargo que ésta sea una concepción muy restrictiva de la cultura. No tengo aquí el espacio para entrar en los detalles (me he ocupado de este problema en: Radford, en vía de publicación 2), pero quisiera recordar brevemente el caso de un “niño salvaje” (*wild child*), que creció sin ningún contacto con la cultura (Newton, 2002). Dicho niño fue encontrado en Rhodez, una ciudad entre Montpellier y Tolouse, en el 1800. El niño, de aproximadamente doce años, era más un animal que un hombre. Pierre-Joseph Bonnaterre –un profesor de historia natural– estudió al niño e intentó enseñarle algunas cosas, pero el niño no aprendió a hablar y no comprendía muchos hechos socio-culturales esenciales. Transcurrió su vida sin lenguaje, involucrándose solamente en prácticas cotidianas extremadamente sencillas. Era ya demasiado tarde, para él, para intentar un ingreso en el lenguaje y en la sociedad. No había podido obtener beneficios de la inteligencia histórica depositada en el lenguaje y en las prácticas sociales y, por lo que podemos saber, tuvo una vida muy simple, principalmente regulada en base al instinto. Permitir a este niño un “libre uso de las fuerzas espirituales” lo mantuvo lejano de la cultura, llevándolo a ser un proto-ser humano que pasaba el tiempo subiéndose a los árboles y corriendo detrás de las mariposas. Considero que este ejemplo, muestra la dimensión del potenciamiento de la cultura. Naturalmente existe otro aspecto concerniente a la cultura y a sus prácticas. Existen buenos modos de enseñar y malos modos de enseñar. Pero, como sugiere mi observación previa, la distinción entre bueno/malo depende de la concepción cultural del conocimiento y del rol con el cual profesores y estudiantes son dotados en los procesos de enseñanza-aprendizaje. Este es el motivo por el cual un profesor puede ser bueno en un determinado país y malo en otro.

No pretendo pasar a la siguiente pregunta sin ocuparme directamente del punto central de la pregunta actualmente en discusión –el problema de la clasificación de los obstáculos. Existe un punto de vista según el cual, independientemente de la cultura y de la fase de crecimiento conceptual del niño, la trayectoria de A a B (para proseguir a considerar la metafórica trayectoria espacial) está atravesada por obstáculos intrínsecos que están bajo la única jurisdicción del saber. Quienquiera que camine sobre la ruta de A a B los encontrará. D'Amore dice, respondiendo a la presente pregunta, que la conocida clasificación de obstáculos (ontogenéticos, didácticos y epistemológicos) podría ser considerada una “comodidad conceptual”. En mi opinión, el problema es que una distinción tal es mucho más que una “comodidad conceptual”. Nuestras elecciones epistemológicas no son inocentes. Son licencias a particulares concepciones del conocimiento y del conocer, y la respuesta a la pregunta de si los obstáculos puedan ser clasificados de un modo o bien de otro depende de estas elecciones.

D'Amore: Haciendo referencia a la idea de “comodidad conceptual”, de ninguna manera se excluye una no neutralidad de las elecciones epistemológicas; puedo incluso ser más drástico que tú, sin ningún temor a la incoherencia, ¡es más!, afirmando que cada elección epistemológica es no neutra, “no inocente”, como tú dices; incluso lo son, en mi opinión, las escogencias epistemológicas implícitas, aquellas no dichas y algunas veces ni siquiera reconocidas por quien las practica.

Bagni: Uno de los miembros de la microsociedad clase tiene la autoridad (socialmente reconocida por la noósfera y por los otros miembros) para establecer si una práctica individual es divergente o coincide con las expectativas; tal miembro es el profesor. ¿Podemos suponer que la desviación de la práctica esperada testifica la existencia de un obstáculo que se ha interpuesto entre la invitación a participar de una práctica social, hecha por el profesor, y la práctica privada puesta en juego por un estudiante, miembro de la microsociedad? La investigación sociológica sería entonces el instrumento para reconocer la existencia de un obstáculo que impide la actuación de prácticas, en una microsociedad que comparte problemas, usos y, justamente, prácticas.

D'Amore: Sí, en mi opinión es así. La tarea personal del estudiante E al interior de la sociedad S es la de inscribirse en las prácticas lingüísticas de condición conceptual de los objetos O establecidos como competencias por alcanzar (D'Amore, 2003e, 2005). La imitación (de una práctica sobretodo lingüística, más en general semiótica) es, desde este punto de vista, la forma más difusa de esta inscripción, que es la que el profesor debe evaluar como una comunión alcanzada con las prácticas (Sierpinska, Lerman, 1996). Desde este punto de vista el profesor tiene un rol determinante, decisivo, y desde un punto de vista sociológico, este rol se le ha reconocido por estatus. El que un estudiante I se desvíe de la práctica esperada como compartida es en realidad un reconocimiento fallido de práctica: el profesor no reconoce en la actividad de I aquella propia, tomada como modelo o propuesta a imitar (D'Amore 2005b; pero es sólo un ejemplo). Por lo tanto, todo se reduce a una confrontación entre prácticas de seres humanos al interior de la sociedad S, sólo que uno de ellos tiene un rol específico, reconocido, único. Creo que la investigación sociológica es el instrumento para indagar expectativas, adhesiones, fugas, desviaciones. Muchos estudios, no solo míos, intentan mostrar cómo también la teoría de las situaciones didácticas se podría interpretar en este sentido (Godino, Llinares, 2000). Sin embargo, implícita en tu pregunta hay cuestiones enormes, las cuales me inquieta afrontar. En algunos trabajos míos de etnomatemática (D'Amore, 2003a; D'Amore, Fandiño Pinilla, 2001, 2005; pero también D'Amore, 2005b) he mostrado cómo la hipótesis de la construcción de *diversas* culturas comparables es real, en lugares lejanos de nosotros o en nuestras mismas aulas. Específicamente, en 2005b he mostrado cómo la idea misma de demostración al estilo euclideano (aristotélica), considerada fundamental por muchos realistas para *la* cultura matemática universal, es interpretada en la realidad escolar por jóvenes estudiantes en un estilo del todo diferente (en términos nyaya)[8]; de esto nace una cosa que me gusta llamar *relatividad de la cultura,* incluso matemática. Esta diversidad de culturas, de interpretaciones, de sugestiones, es de una profunda riqueza que demasiado frecuentemente es desconocida en nombre de una universalidad que, simplemente, no existe como hecho cultural, es reductiva, es falsa. Por tres años he tenido ocasión de hacer viajes frecuentes a Luxemburgo y frente a mis propuestas de interpretación de la didáctica, los profesores me decían: Pero nuestro problema no es la didáctica, nuestro problema es la variedad de lenguas puestas en juego por los estudiantes; ya no sabemos en qué lengua dirigirnos a ellos. Este era un modo perfecto para observar mejor, sobre una base concreta, por más parcial que sea, la *babel semiótica* de cada clase, considerando como contribución cada estímulo personal. He apreciado mucho el trabajo de Radford (2004b) y he seguido palabra por palabra aquello que en éste observaba y sugería. Creo que este trabajo suyo, y el mío (2005b), desde este punto de vista se apartan un poco de la mayor parte de los bienpensantes (no es una causalidad que, antes de publicar el mío, haya sometido a su consideración toda la reflexión). Para terminar, creo que permitir una libertad expresiva también en matemática es un bien preciado para el aprendizaje de la matemática, aun sí requiere profesores preparados y cultos.

Radford: La cuestión de los problemas concernientes a *la desviación* respecto a una práctica bien establecida es un problema delicado en la educación, sobretodo hoy, en la medida en que nuestras aulas están volviéndose cada vez más multiculturales. Siempre he sostenido que es un error concebir la cultura como una camisa de fuerza. He planteado aquí que las culturas tienen una dimensión de potenciamiento. Pero las culturas son variadas. Transmiten valores y aptitudes diferentes (por ejemplo, las aptitudes al aprendizaje y a la matemática), etc. Este punto ha sido claramente expuesto por Anna Sfard en su reciente conferencia plenaria en la 2005 PME Conference en Australia (Sfard, Prusak, 2005). La pregunta de fondo es la siguiente: ¿Cómo nos ocuparemos de la cuestión de la *diferencia*? Quiero hacer aquí referencia al trabajo de Judith Bernhard (1995). En su artículo, Bernhard distingue cuatro momentos en los cuales la diferencia ha sido considerada en el pasado: (1) diferencia cómo déficit; (2) diferencia como desventaja / privación; (3) diferencia como diferencia no sustancial; y (4) diferencia como heterogeneidad fundamental. Las primeras tres, afirma Bernhard, corresponden aproximadamente a las perspectivas dominantes, en los sucesivos períodos históricos de la corriente principal del pensamiento psicológico. En la primera,

[8] "Nyaya" significa "logica" en idioma indú antiguo.

en particular, existe la fe en la “universalidad de las normas occidentales y en el hecho de que las prácticas de las otras culturas representan una divergencia o bien una forma menos desarrollada respecto al ideal. Las diferencias han sido frecuentemente vistas como signos de capacidades innatas”. Parece que las cosas han cambiado un poco y que hoy existe la disposición para entender a la diversidad como heterogeneidad fundamental. La historia de la matemática y de la etnomatemática puede ser aquí de gran utilidad. Puede aportar importantes sugerencias sobre cómo comprender la diversidad. Debemos entender que pertenecemos a una tradición intelectual centrada en los textos - pertenecemos de hecho a una fuerte “tradición escrita”, para usar términos de Jack Goody. Los textos matemáticos deben ser expresados a través de signos escritos. De acuerdo, pero existen otros tipos de expresión, como muestra la tradición oral. Existen otros modos de reflexionar sobre el mundo que pueden ser llamados “matemáticos”. En (Radford, 2004b) he planteado la necesidad de repensar nuestro concepto de “texto matemático”, y de ampliarlo de forma tal que incluya otros signos, como palabras pronunciadas, gestos, acciones, etc. En mis investigaciones en el aula he encontrado frecuentemente estudiantes (no necesariamente provenientes de otras culturas) deseosos –y además felices- de hacer matemática teniendo la posibilidad de expresarse en medios diferentes de la escritura. La pregunta es: ¿Sería todavía “nuestra” matemática? Pienso que la respuesta es no. El punto central, sin embargo, es que yo no afirmo que eso constituiría una pérdida. Es más, pienso que sería una *ganancia*. Naturalmente debo todavía convencer de esto a un ejército de colegas e imagino que eso no será fácil, especialmente cuando intente convencer a aquellos provenientes de la formación racionalista.

Referencias bibliograficas

Bachelard G. (1938). *La formation de l'esprit scientifique*, VRIN, Paris.

Bagni G.T. (2005). The historical roots of the limit notion. Cognitive development and development of representation registers, *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education* 5:4, 453-468.

Bagni G.T. (in via di pubblicazione). Some cognitive difficulties related to the representations of two major concepts of Set Theory. *Educational Studies in Mathematics.*

Bagni G.T., D'Amore B. (2005). Epistemologia, sociologia, semiotica: la prospettiva socio-culturale, *La matematica e la sua didattica*. 1, 73-89.

Balacheff N. (1988). Le contrat et la coutume: deux registres des interactions didactiques. Laborde C. (Ed.). *Actes du premier colloque franco-allemand de didactique des mathématiques et de l'informatique*. Grenoble: La Pensée Sauvage. 15-26.

Barbin E. (1994). Sur la conception des savoirs géométriques dans les Éléments de Géométrie. Gagatsis A. (Ed.). Histoire et enseignement des Mathématiques. *Cahiers de didactique des Mathématiques*. 14-15, 135-158.

Bauersfeld H. (1995). "Language game" in the mathematics classroom: their function and their effects. In: Cobb P., Bauersfeld H. (eds.) (1995). *The emergence of meaning: interaction in class-room cultures*. Hillsdale NJ: Lawrence Erlbaum Ass.

Bernhard J. (1995). Child development, cultural diversity, and the professional training of early childhood educators. *Canadian Journal of Education*. **20**(4), 415-436.

Brickhouse N. (1990). Teachers' beliefs about the nature of science and their relationship to classroom practice. *Journal of teacher education*. 41 (3), 53-62.

Brousseau G. (1976). Les obstacles épistémologiques et les problèmes in mathématiques. Wanhamme W., Wanhamme J. (Eds.). *La problématique et l'enseignement des mathématiques*, Actes de la XXVIIIème rencontre CIEAEM, Louvain la Neuve, 5-12 août 1976.

Brousseau G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes in mathématiques. *Reserches en Didactique des Mathématiques*. 4, 2, 165-198.

Brousseau G. (1989). Les obstacles épistémologiques et la didactique des mathématiques. Bednarz N., Garnier C. (Eds.). *Constructions des savoirs, obstacles et conflits*. 41-64. Montreal: Agence d'Arc.

Castoriadis C. (1987). *The imaginary institution of society*. Massachusetts, M.I.T. Press.

D'Amore B. (1999). *Elementi di didattica della matematica*. Bologna: Pitagora.

D'Amore B. (2001a). Une contribution au débat sur les concepts et les objets mathématiques. *Scientia Paedagogica Experimentalis*. XXXVIII, 1, 17-46.

B. D'Amore (2001b). Conceptualisation, registres de représentations sémiotiques et noétique: interactions constructivistes dans l'apprentissage des concepts mathématiques et hypothèse sur quelques facteurs inhibant la dévolution. *Scientia Paedagogica Experimentalis*. Gent, Belgio. XXXVIII, 2, 143-168.

D'Amore B. (2003a). Matemática em algumas culturas da America do Sul: Uma contribuição à Etnomatemática. *Bolema. Boletim de Educação Matemática*. Rio Claro, SP, Brasile. 19, 73-89.

D'Amore B. (2003b). *Le basi filosofiche, pedagogiche, epistemologiche e concettuali della Didattica della Matematica*. Bologna: Pitagora.

D'Amore B. (2003c). The noetic in mathematics. *Scientia Pedagogica Experimentalis*. (Gent, Belgio). XXXIX, 1, 75-82.

D'Amore B. (2003d). La complexité de la noétique en mathématiques ou les raisons de la dévolution manquée. *For the learning of mathematics*. 23, 1, 47-51.
D'Amore B. (2003e). La complejidad de la educación y de la construcción del saber. *Suma* (Zaragoza, Spagna). 43, 23-30.
D'Amore B. (2004). Il ruolo dell'Epistemologia nella formazione degli insegnanti di Matematica nella scuola secondaria. *La matematica e la sua didattica*. 4, 4-30.
D'Amore B. (2005a). Pratiche e metapratiche nell'attività matematica della classe intesa come società. Alcuni elementi rilevanti della didattica della matematica interpretati in chiave sociologica. *La matematica e la sua didattica.* 3, 325-336.
D'Amore B. (2005b). Secondary school students' mathematical argumentation and Indian logic (nyaya). *For the learning of mathematics*. 25, 2, 26-32.
D'Amore B., Fandiño Pinilla MI. (2001). Matemática de la cotidianidad. *Paradigma*. (Maracay, Venezuela). XXII, 1, 59-72.
D'Amore B., Fandiño Pinilla M.I. (2004). Cambi di convinzione in insegnanti di matematica di scuola secondaria superiore in formazione iniziale. *La matematica e la sua didattica*. 3, 27-50.
D'Amore B., Fandiño Pinilla M.I. (2005). Storia ed epistemologia della matematica basi etiche. *La matematica e la sua didattica*. 4, 503-515.
D'Amore B., Godino J.D. (2006). Punti di vista antropologico ed ontosemiotico in Didattica della Matematica. *La matematica e la sua didattica*. 1, 9-38.
D'Amore B., Sbaragli S. (2005). Analisi semantica e didattica dell'idea di "misconcezione". *La matematica e la sua didattica*. 2, 139-163.
D'Amore B., Speranza F. (eds) (1989). *Lo sviluppo storico della matematica - Spunti didattici*. Vol. primo. Roma: Armando.
D'Amore B., Speranza F. (eds) (1992). *Lo sviluppo storico della matematica - Spunti didattici*. Vol. secondo. Roma: Armando.
D'Amore B., Speranza F. (eds) (1995). *La matematica e la sua storia. Alcuni esempi per spunti didattici*. Milano: Angeli.
de Haan M. (1999). *Learning as a cultural practice*. Amsterdam: Thela Thelis.
Eco U. (1975). *Trattato di semiotica generale*. Milano: Bompiani.
Enriques F. (1942). L'errore nelle matematiche. *Periodico di matematiche*. IV, XXII. [Sotto lo pseudonimo A. Giovannini].
Fauvel J. and Maanen, J. (2000). *History in Mathematics Education. The ICMI Study.* Dordrecht
Boston, London: Kluwer**.**
Feyerabend P.K. (2003). *Contro il metodo*. Milano: Feltrinelli. (I ed. originale inglese: London, 1975).
Furinghetti F., Radford L. (2002). Historical conceptual developments and the teaching of mathematics: from philogenesis and ontogenesis theory to classroom practice. English L. (Ed.). *Handbook of International Research in Mathematics Education*. 631-654. Hillsdale: Erlbaum.
Gadamer H.-G. (1975). *Truth and Method*. New York: Crossroad. (2nd ed.: 1989).
Godino J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 22, 2/3, 237-284.
Godino J.D., Batanero C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en didactiques des mathématiques*. 14, 3, 325-355.
Godino J. D., Llinares S. (2000). El interaccionismo simbólico *en* educación matemática. *Educación Matemática*. 12, 1, 70-92.

Grugnetti L., Rogers L. (2000). Philosophical, multicultural and interdisciplinary issues. Fauvel J., van Maanen J. (Eds.). *History in Mathematics Education*. 39-62. Dodrecht: Kluwer.

Habermas J. (1999), *Wahrheit und Rechtfertigung. Philosophische Aufsätze*. Frankfurt a.M.: Suhrkamp (*Truth and Justification*, MIT Pr., Cambridge 2003).

Hardesty D. (1977). *Ecological Anthropology*. New York: Wiley.

Hashweb M.Z. (1996). Effects of science teachers' epistemological beliefs in teaching. *Journal of Research in Science Teaching*. 33 (1), 47-63.

Ilyenkov E. (1977). The concept of the ideal. *Philosophy in the USSR. Problems of Dialectical Materialism*. Moscow: Progress Publishers.

Leontiev A.A. (1981a). Sign and Activity. Wertsch J.V. (Ed.) (1981). *The Concept of Activity in Soviet Psychology*. New York: Sharpe. 241-255.

Leontiev A.A. (1981b). The problem of Activity in Psychology. Wertsch, J.V. (Ed.) (1981). *The Concept of Activity in Soviet Psychology*. New York: Sharpe. 37-71.

McClain K., Cobb P. (1997). *An analysis of the teacher's role in guiding the evolution of sociomathematical norms*. Vanderbilt University.

Newton, M. (2002). *Savage Girls and Wild Boys. A History of Feral Children*. London, Faber and Faber.

Piaget J., Garcia R. (1983). *Psychogenèse et histoire des sciences*. Paris: Flammarion.

Perrin-Glorian, M.-J. (1993). Théorie des situations didactiques: naissance, développement et perspectives. *Vingt ans de didactique des mathématiques en France.* Grenoble : La pensée sauvage**:** 97-147.

Radford L. (1997). On Psychology, Historical Epistemology and the Teaching of Mathematics: Towards a Socio-Cultural History of Mathematics. *For the Learning of Mathematics*. 17(1), 26-33.

Radford L. (2003a). On the epistemological limits of language. Mathematical knowledge and social practice in the Renaissance. *Educational Studies in Mathematics*. 52(2), 123-150

Radford L. (2003b). On Culture and Mind. A post-Vygotskian Semiotic Perspective, with an Example from Greek Mathematical Thought. Anderson M. et Al. (Eds.). *Educational Perspectives on Mathematics as Semiosis: From Thinking to Interpreting to Knowing*. 49-79, Legas, Ottawa.

Radford L. (2004a). *The Cultural-Epistomological Conditions of the Emergence of Algebraic Symbolism.* Plenary Lecture presented at the 2004 History and Pedagogy of Mathematics Conference, Uppsala, Sweden. (text available at: http://laurentian.ca/educ/lradford/PUBLIC.HTML).

Radford L. (2004b). Syntax and Meaning. In M. J. Høines and A. B. Fuglestad (eds.), *Proceedings of the 28 Conference of the international group for the psychology of mathematics education* (PME 28), Vol. 1, pp. 161-166. Norway: Bergen University College.

Radford L. (in via di pubblicazione 1). The Anthropology of meaning. *Educational Studies in Mathematics*.

Radford L. (in via di pubblicazione 2). Semiótica cultural y cognición. In: R. Cantoral y O. Covián (eds.), *Investigación en Matemática Educativa en Latinoamérica*. México.

Radford L., Boero P., Vasco C. (2000). Epistemological assumptions framing interpretations of students understanding of mathematics Fauvel J., van Maanen J. (Eds.). *History in Mathematics Education*. 162-167. Dordrecht: Kluwer.

Robertson I. (1977). *Sociobiology*. New York: Worth Publishers Inc.

Romberg T. (1988). Necessary ingredients for a theory of mathematics education. In: Steiner HG., Vermandel A. (eds) (1988). *Foundations and methodology of the discipline Mathematics Education*. Proceedings of the 2nd TME. Bielefeld.

Sfard A., Prusak, A. (2005). Telling identities: The missing link between culture and learning mathematics. *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. H. L. Chick and J. L. Vincent. Melbourne. **1:** 37-52.

Sierpinska A., Lerman S. (1996). Epistemology of mathematics and of mathematics education. In: Bishop AJ. et al. (eds.) (1996). *International handbook of mathematics education*. 827-876. Dordrecht NL: Kluwer Academic Publ.

Wartofsky M. (1979). *Models, Representation and the Scientific Understanding*. Dordrecht: Reidel.

Werner H. (1948). *Comparative Psychology of Mental Development*. New York: International University Press. 2nd edition: 1957.

Wittgenstein L. (1956), *Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik*. Oxford: Blackwell.

Los Autores.

Luis Radford es profesor de la Laurentian University, Ontario, Canada. Enseña en la École des sciences de l'éducation en el programa de formación de profesores y dirige la investigación en el Laboratory of Cultural Semiotics and Mathematical Thinking. Es autor (con Serge Demers) del libro *Communication et apprentissage*, publicado en el 2004 con el patrocinio del Ontario Ministry of Education. Actualmente es editor asociado de la revista *For the Learning of Mathematics* y miembro del comité editorial de numerosas revistas, entre ellas *Educational Studies in Mathematics, Mathematical Thinking and Learning, Revue des sciences de l'éducation, Educación Matemática, Revista Latinoamericana de Matemática Educativa, Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education.* Ha recibido en el 2004-05 el Laurentian University Research Excellence Award.

Bruno D'Amore es full profesor de la Universidad de Bologna y de Bolzano, en l'Alta Scuola Pedagogica di Locarno y tiene anualmente cursos de postgrado en la Universidad Distrital de Bogotá. Es el científico responsable del Núcleo di Ricerca di Bologna; ha fundado y dirige la revista *La matematica e la sua didattica* y el Convenio Nacional *Incontri con la Matematica* de Castel San Pietro Terme. Es miembro del Comité Científico de varias revistas italianas y de las siguientes internacionales: *Cahiers de Didactique des Mathématiques* (Grecia), *Bollettino degli insegnanti di Matematica* (Suiza), *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* (México), *Tea* (Colombia), *Mediterranean journal for research in mathematics education* (Cipre). Es autor, entre otros, de los siguientes libros: *Problemi* (prefacio de Gérard Vergnaud, Milán: Angeli, 1993; ed. en lengua española, Madrid: Síntesis, 1997); *Le basi filosofiche, epistemologiche, pedagogiche e concettuali della didattica della matematica* (prefacio de Guy Brosseau, Bologna: Pitagora, 2003; ed. en lengua española, Barcelona-Mexico : Reverté ed., 2005;ed en lengua portuguesa , Sao Paulo: Escritura ed., 2005); *Elementi di didattica della* *matemática* (prefacio de Colette Laborde, Bologna: Pitagora, 1999; y en lengua española, Bogotá: Magisterio, 2006; en curso la traducción en lengua portuguesa). Este último libro ha obtenido el I premio absoluto *Lo stilo d'oro* en el 2000.

Giorgio T. Bagni, es investigador confirmado de matemáticas complementarias en el Dipartimento di Matematica e Informatica; enseña en la Facoltá di Scienze Della Formazione y es miembro de la Commissione per il Corso Interfacoltá di Filosofia Della Forma de la Universitá di Udine. Es socio honorario del Ateneo di Treviso.